Incertitude et traitement des valeurs aberrantes

Alexandre Allard

MESURES ET RÉFÉRENCES

VECTEUR DE COMPÉTITIVITÉ
ET DE SÉCURITÉ

LNE

Le progrès, une passion à partager

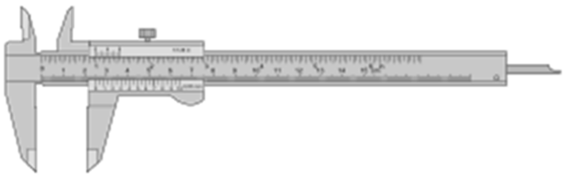
Sommaire

- Incertitude de mesure
  - Concept
  - Evaluation de l'incertitude de mesure (GUM, Monte-Carlo, Comparaisons inter-laboratoires)
- Valeurs aberrantes
  - Pourquoi s'y intéresser ?
  - Comment les détecter ?
  - Comment les traiter ?
- Conclusion

LNE
Le progrès, une passion à partager

Le concept d'incertitude

Toute mesure est accompagnée d'une incertitude de mesure



Résultat de mesure (VIM 2012) : ensemble de valeurs attribuées à un mesurande complété par toute autre **information pertinente disponible**

Note 2 : Le résultat de mesure est généralement exprimé par une **valeur mesurée** unique et une **incertitude de mesure**.

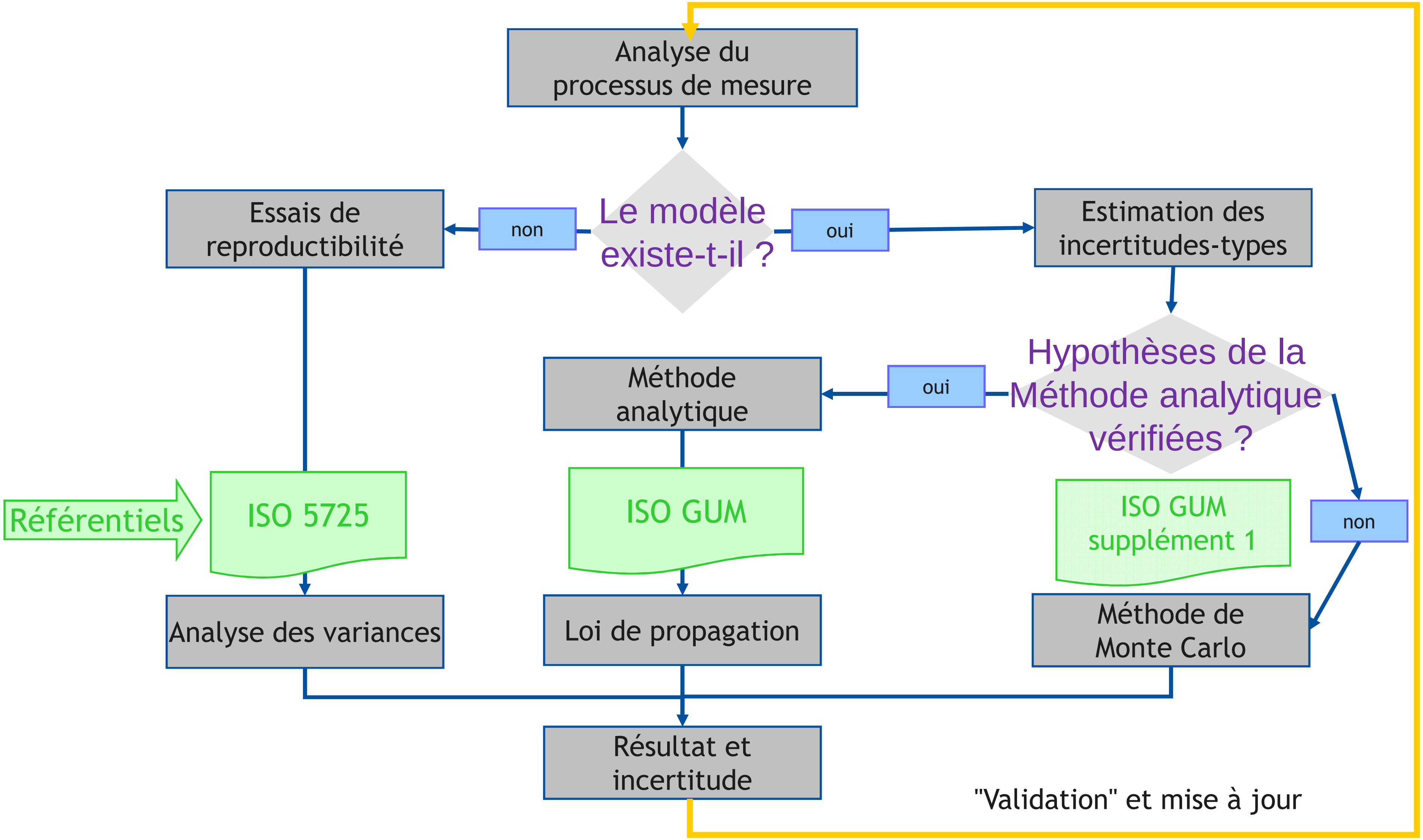
Le concept d'incertitude

Incertitude de mesure (VIM 2012) : paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées.

Ce paramètre peut être :

- Un écart-type (aussi appelé incertitude-type)
- Un multiple de l'écart-type (incertitude élargie)
- La demi-étendue d'un intervalle ayant une probabilité de couverture déterminée.

Panorama des méthodes d'évaluation



L'évaluation de l'incertitude selon le GUM/GUM-S1

GUM
GUM S1

Étape 3 : Propagation de l'incertitude (LPU, MMC)

Étape 2 :
Quantification des sources d'incertitude des x_i
incertitude-type
ou
loi de probabilité

Étape 1 : Analyse du processus de mesure

Grandeurs d'entrée
Incertaines : x_i

Modèle mathématique
du processus de mesure
$f(X_1,..,X_n)$

Mesurande
$Y = f(X_i)$

Étape 4 :
Expression finale du résultat
y ± U

Étape 3' : Analyse de sensibilité, Hiérarchisation

Rebouclage
(feedback)

Etape 1 : Analyse du processus de mesure

- Étape la plus **importante** de l'évaluation de l'incertitude, généralement la plus **longue**

- Étape **commune à toutes les méthodes d'évaluation de l'incertitude**

- Définir et spécifier à la fin de cette étape:
  - Le mesurande y
  - Le processus de mesure
  - Les grandeurs d'entrée $x_1, \cdots x_n$
  - Le modèle mathématique $y = f(x_1, \cdots x_n)$

Etape 1 : Exemple fil rouge

- Définition du mesurande : Le mesurande est la longueur d'une cale déterminée comme la moyenne de 5 mesures obtenues à l'aide d'un mètre à ruban de classe 2.

$$l = \bar{l} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}{5}$$

- Quelles sont les causes d'erreur possibles ?
  - Répétabilité de la mesure
  - Erreur de quantification (résolution du mètre à ruban)
  - Erreur de justesse (classe du mètre à ruban)

- Ecriture du modèle mathématique du processus de mesure

$$l = \bar{l} + l_q + l_j$$

LNE
Le progrès, une passion à partager

Etape 2 : Quantification des sources d'incertitude

- **Objectif** : Déterminer une incertitude-type u pour chaque grandeur d'entrée du modèle mathématique

Type A → n mesures répétées → Calcul de l'écart-type s des n mesures → $u(X_i) = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Type B → Autre information → Choix d'une loi de probabilité

- Certificat d'étalonnage
- Constat de vérification
- Avis d'expert
- …

$u(X_i)$ est l'écart-type de la loi de probabilité choisie

Etape 2 : Exemple fil rouge

- **Répétabilité** $\bar{l}$: Evaluation de type A, on calcule l'écart-type de la moyenne des n = 5 mesures.

$$u(\bar{l}) = \frac{s}{\sqrt{5}} = \frac{0{,}21}{\sqrt{5}} = 0{,}093 \text{ cm}$$

- **Quantification** l_q : Le mètre à ruban est gradué tous les millimètres, soit une résolution $q = 0{,}1\ cm$. Ainsi, pour une lecture de 32,3 cm, l'erreur maximale due à la résolution est de $a = 0{,}05\ cm$.
  - Choix d'une loi uniforme sur l'intervalle $[-0{,}05; 0{,}05]$
  - Calcul de l'écart-type associé : $u(l_q) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}05}{\sqrt{3}} = 0{,}029\ cm$
- **Justesse** l_j : Le mètre à ruban est de classe II, ce qui signifie que l'Erreur Maximale Tolérée (EMT) est de 0,8 mm,
  - Choix d'une loi uniforme sur l'intervalle $[-0{,}08; 0{,}08]$
  - Calcul de l'écart-type associé : $u(l_j) = \frac{EMT}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}08}{\sqrt{3}} = 0{,}046\ cm$

Etape 3 : Formule de propagation de l'incertitude (ou des variances)

Si toutes les grandeurs d'entrée sont indépendantes :

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

S'il existe des covariances :

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) u(x_i)u(x_j)$$

Formule de propagation de l'incertitude
(Formule de propagation des variances)

Etape 3 : Exemple fil rouge

$$l = \bar{l} + l_q + l_j$$

$$\begin{cases} \bar{l} = 32.54 \\ u(\bar{l}) = 0{,}093 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_q = 0 \\ u(l_q) = 0{,}029 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_j = 0 \\ u(l_j) = 0{,}046 \end{cases}$$

Calcul de la variance associée au mesurande à l'aide de la formule de propagation des variances :

$$u^2(l) = u^2(\bar{l}) + u^2(l_q) + u^2(l_j) = 1.16 \times 10^{-2}$$

Calcul de l'incertitude-type associée :

$$u(l) = \sqrt{u^2(l)} = 0.1\ cm$$

Etape 4 : Expression finale du résultat

$$U = k \times u(y)$$

- Déterminer le coefficient d'élargissement k (souvent $k = 2$)

- Application au cas fil rouge :

$$U = 2 \times u(l) = 0.2 \text{ cm}$$

Expression finale du résultat de mesure :

$$\boldsymbol{l = 32.5 \pm 0.2\ cm\ (k = 2)}$$

LNE

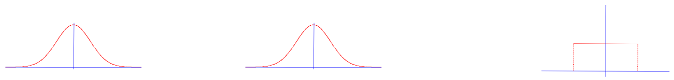
Le progrès, une passion à partager

Simulations de Monte Carlo (GUM-S1)

- Principe : simuler de façon aléatoire les phénomènes physiques

X_1 X_2 X_n

Étape 2

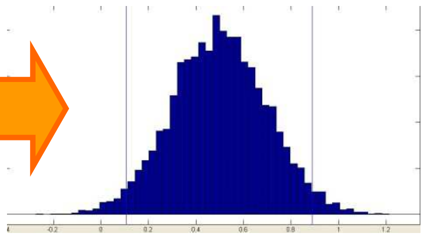


Étape 3 : Générateur de nombres pseudo aléatoires

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,M} & \cdots & x_{n,M} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$y = f(x_1, \cdots x_n)$$

Étape 4



$$\begin{cases} y \\ u(y) \\ [y_{inf}; y_{sup}] \end{cases}$$

Comparaisons inter-laboratoires (caractérisation d'une méthode)

	Résultats	bruts	
labo 1	y_{11}	$\cdots$	y_{1n_1}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
labo i	y_{i1}		y_{in_i}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
labo p	y_{p1}		y_{pn_p}

moyenne	écart–type
$\bar{y}_1$	s_1
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\bar{y}_p$	s_p

Statistiques descriptives

$\Downarrow$

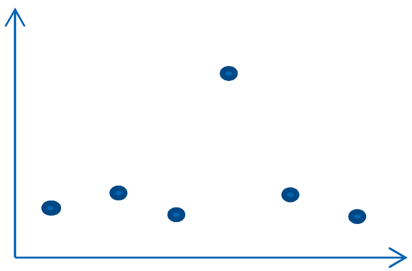
Grubbs **Cochran** $\Leftarrow$ Tests d'homogénéité (filtre $p \Rightarrow p^*$)

Hypothèse : n_i constant

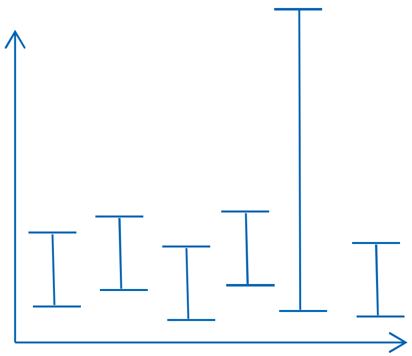
$\bar{\bar{y}} = \frac{\sum_p \bar{y}_i}{p^*}$		***écart – type***
	$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{p^*} s_i^2}{p^*}}$	***répétabilité***
	$s_R = \sqrt{\frac{1}{p^*-1}\sum_{p^*}(\bar{y}_i - \bar{\bar{y}})^2 + \frac{n-1}{n}s_r^2}$	***reproductibilité***

Valeurs aberrantes : Tests de Grubbs et Cochran

- Dans une comparaison interlaboratoires pour déterminer la l'exactitude d'une méthode de mesure, on cherche une **valeur consensuelle** pour la grandeur mesurée, avec un écart-type de **répétabilité** et de **reproductibilité** associés.
- Les résultats d'un laboratoire qui seraient décalés des autres résultats (en moyenne ou en variance) peuvent perturber cette estimation.



Test de Grubbs (détecte une valeur aberrante en moyenne)



Test de Cochran (détecte une valeur aberrante en variance)

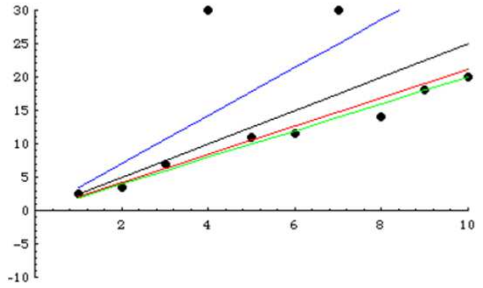
Pourquoi s’intéresser aux valeurs aberrantes ?

Les valeurs aberrantes :

- Perturbent les analyses statistiques usuelles : calcul de moyennes, de variances, d’écarts-types
- Peuvent résulter d’une mauvaise mise en œuvre de la méthode de mesure
  - Exemple 1 : les conditions environnementales spécifiées pour la mesure ont été perturbées pour une mesure particulière
  - Exemple 2 : l’opérateur n’a pas correctement positionné l’échantillon
  - …
- Peuvent provenir du fait que la grandeur n’est pas distribuée selon une loi normale

Les valeurs aberrantes en métrologie

- Comparaisons inter-laboratoires (Grubbs, Cochran)
- Construction d'une droite d'étalonnage

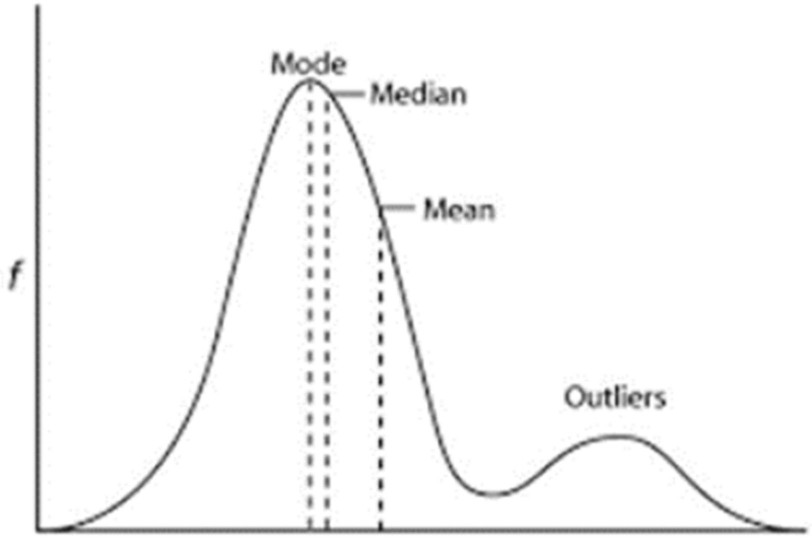


- Evaluation de la répétabilité ou reproductibilité d'un système de mesure
- Analyse d'un échantillon de données : pollution de cours d'eau, système de traitement de la parole, essai clinique, test d'un dispositif médical,…

LNE
Le progrès, une passion à partager

Pourquoi détecter une valeur aberrante ?

- Les valeurs aberrantes ne sont pas nécessairement **mauvaises ou erronées.** Elles peuvent signifier la présence d'un phénomène rare, encore non compris



Pourquoi détecter une valeur aberrante ?

- De nombreuses méthodes statistiques traditionnelles sont sensibles à la présence de valeurs aberrantes.

Estimer une moyenne ou un écart-type en présence de données aberrantes peut conduire à une estimation faussée du paramètre

Comment traiter les valeurs aberrantes ?

Valeurs aberrantes

Détection + élimination

Tests statistiques classiques

Méthodes robustes

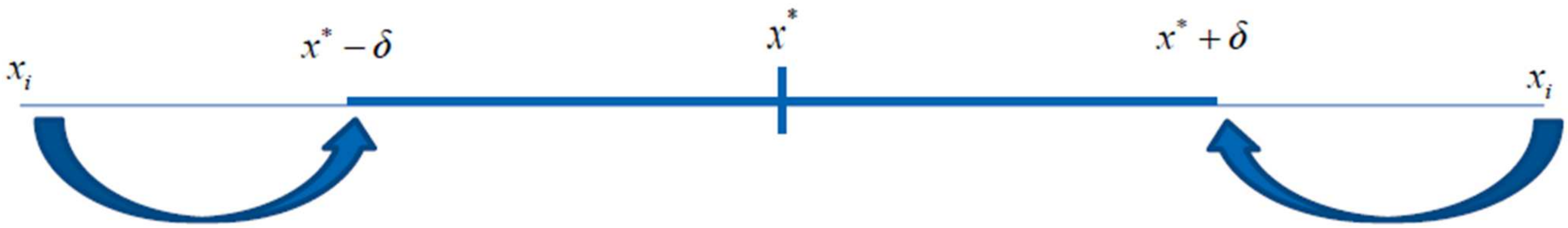
- Calcul de moyennes, d'écart-types,
- Estimation de droites de régression,
- …

- Calculs de médianes,
- Méthodes robustes pour le traitement des comparaisons inter-laboratoires (Algorithme A, Q de Hampel, …)

Valeurs aberrantes : Algorithmes robustes

- ***Objectif :* réduire l'influence des 'outliers' sans les éliminer**

- Soit on **transforme** les valeurs extrêmes (on les plafonne) avant de calculer une moyenne arithmétique, Par exemple en ramenant les valeurs extrêmes à des bornes maximales prédéterminées



- Soit on **pondère** les valeurs extrêmes avant de résoudre une équation

Valeurs aberrantes : Algorithme A (algorithme itératif)

- *p* laboratoires
- Valeurs initiales :

$$\begin{cases} x^* = Médiane\ de\ x_i \\ s^* = 1{,}483 * Médiane\ de\ |x_i - x^*| \end{cases}$$

- Poser $\delta = 1{,}5 * s^*$
- Transformation des données :

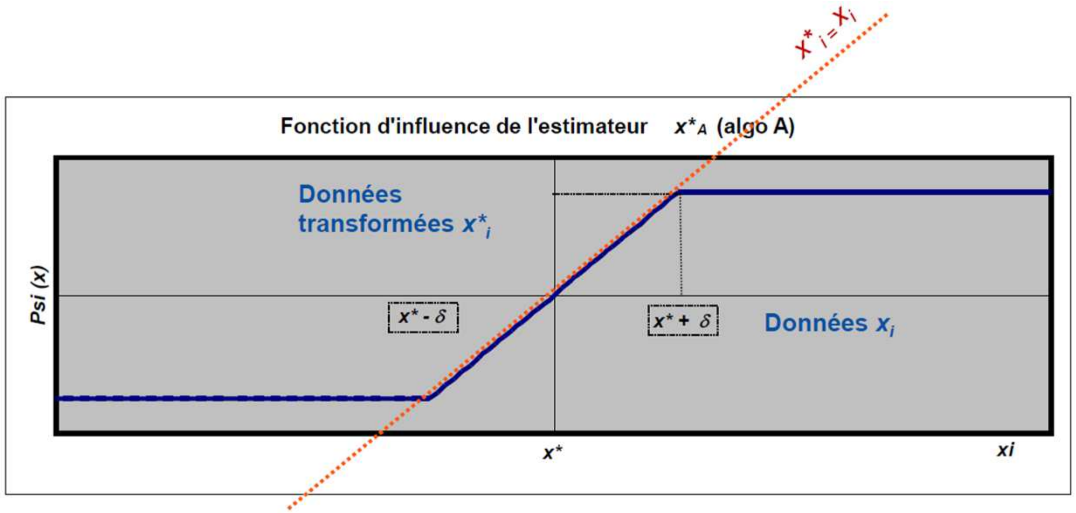
$$x_i{}^* = \begin{cases} x^* - \delta & \text{si } x_i < x^* - \delta \\ x^* + \delta & \text{si } x_i > x^* + \delta \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}$$

- Calculer les nouvelles valeurs de la moyenne et de l'écart-type :

$$x^* = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} x_i{}^*$$

$$s^* = 1{,}134\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}(x_i{}^* - x^*)^2}{p-1}}$$

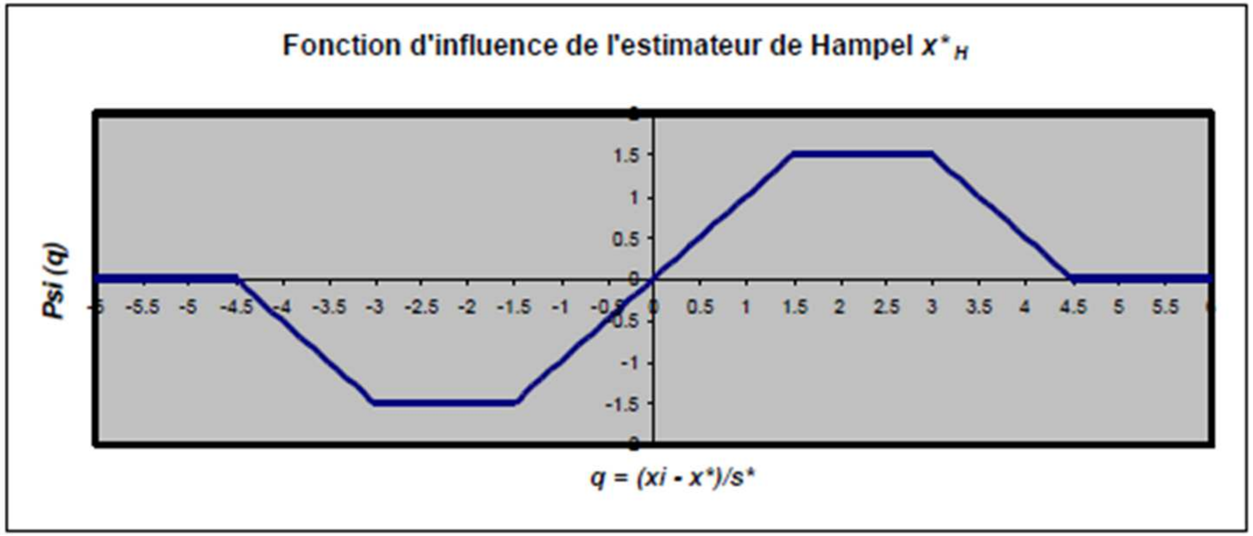
- Itérer jusqu'à convergence



Valeurs aberrantes : Algorithme de Hampel

- Calculer la moyenne robuste $x_H{}^*$ en résolvant l'équation : $$\sum_{i=1}^{p} \psi\left(\frac{x_i - x_H{}^*}{s^*}\right) = 0$$

$$\text{Avec } \psi(q) = \begin{cases} 0 & \text{pour } q \leq -4{,}5 \\ -4{,}5 - q & \text{pour } -4{,}5 \leq q \leq -3 \\ -1{,}5 & \text{pour } -3 \leq q \leq -1{,}5 \\ q & \text{pour } -1{,}5 \leq q \leq 1{,}5 \\ 1{,}5 & \text{pour } 1{,}5 \leq q \leq 3 \\ 4{,}5 - q & \text{pour } 3 \leq q \leq 4{,}5 \\ 0 & \text{pour } q > 4{,}5 \end{cases}$$



Conclusion

- Une incertitude de mesure est associée à chaque résultat de mesure

- Il existe différentes méthodes d'évaluation de l'incertitude
  - Méthode GUM (Méthode de référence)
  - Méthode Monte Carlo (Supplément 1 du GUM)
  - Comparaisons interlaboratoires (ISO 5725-2)

- Les valeurs aberrantes peuvent perturber l'analyse des résultats de mesure
  - Détection : tests statistiques (Grubbs, Cochran, …)
  - Analyse critique : Est-ce une valeur aberrante ou simplement une valeur « extrême » ?
  - Prendre en compte les valeurs aberrantes dans l'analyse soit en les écartant, soit en utilisant des méthodes robustes

Références

- Guide pour l'expression de l'Incertitude de Mesure (**GUM**), JCGM100:2008, http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_F.pdf

- **Supplément 1 du GUM** : Propagation de distributions en utilisant une méthode de Monte Carlo, JCGM101:2008, http://www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM_101_2008_E.pdf

- **Norme ISO 5725-2** : Exactitude (justesse et fidélité) des résultats et méthodes de mesure - Partie 2 : méthode de base pour la détermination de la répétabilité et de la reproductibilité d'une méthode de mesure normalisée

- **Norme ISO 13528** : Méthodes statistiques utilisées dans les essais d'aptitude par comparaisons interlaboratoires

Merci de votre attention